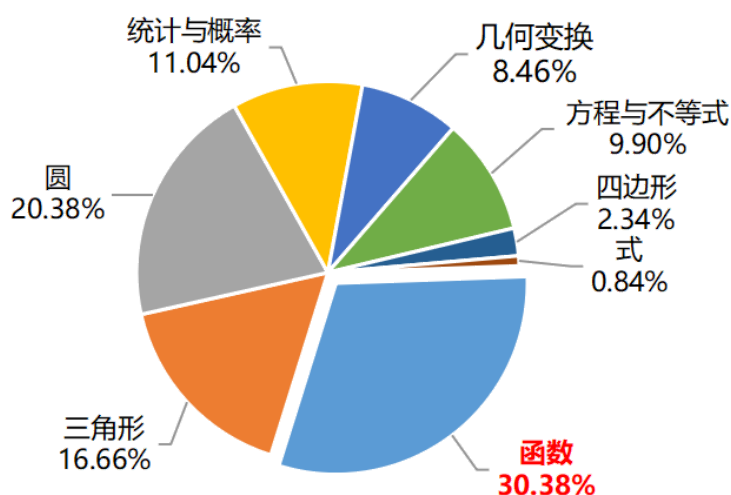


第1讲 二次函数图象及基本性质

二次函数是人教版教材第二十二章的内容，在了解二次函数性质的基础上，还会与我们之前所学的代数及几何进行综合，是期中、期末考试的重要考察点。本模块《二次函数初步》，重点包括二次函数的图象与基本性质，二次函数与代数综合，同时也需要学生在理解性质的基础上，利用所学内容解决实际问题。

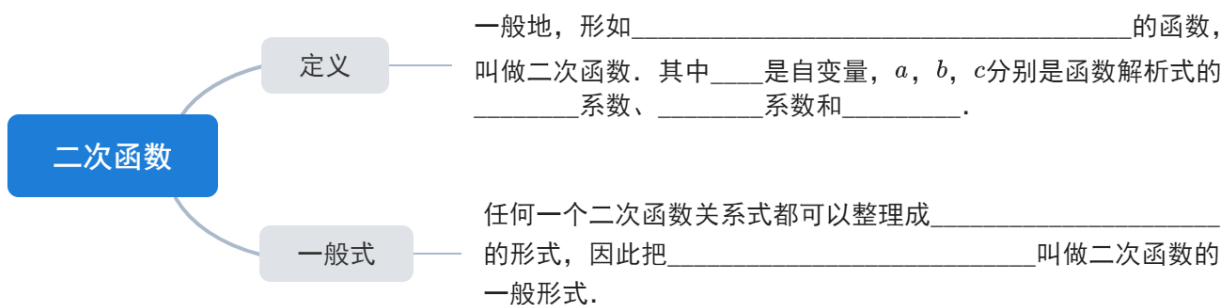
本模块难度适中，适用于基础知识的夯实，本模块二次函数图象及基本性质、二次函数解析式与图象变换、二次函数与方程不等式、二次函数的实际应用4讲内容，加油站与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
二次函数的概念	★	低
二次函数图象与性质	★★	中
二次函数解析式	★	高
二次函数图象变换	★★★	中
二次函数与方程	★★★★	中
二次函数与不等式	★★★★	中
二次函数实际应用	★★★	高

一、二次函数概念



【备注】 1、二次函数定义：一般地，形如 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 的函数，叫做**二次函数**。其中 x 是自变量， a, b, c 分别是函数解析式的二次项系数、一次项系数和常数项。

2、二次函数一般式：任何一个二次函数关系式都可以整理成 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 的形式，因此把 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 叫做**二次函数的一般形式**。

3、二次函数结构特征判断：

- ① 等号左边是变量 y ，右边是关系自变量 x 的**整式**；
- ② a, b, c 为常数，且 $a \neq 0$ 。
- ③ 等式的右边**最高次数为2**，可以没有一次项和常数项，但**不能没有二次项**。

！注意：判断是否为二次函数时，也要先将函数化为一般式后再进行判断

4、二次函数自变量的取值范围：

- ① 一般情况下，二次函数自变量的取值范围是全体实数。
- ② 实际问题中，自变量的取值范围根据实际问题而定。

🍎 举个“栗”子

栗子1

1. 2017~2018学年10月天津天津市第四十二中学初三上学期月考第1题3分 ★★

下列函数是二次函数的有 ()。

- ① $y = 1 - x^2$ ，② $y = \frac{2}{x^2}$ ，③ $y = x(x - 3)$ ，④ $y = ax^2 + bx + c$ ，⑤ $y = 2x + 1$ ，⑥

$$y = 2(x + 3)^2 - 2x^2$$

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【备注】 判断是否为二次函数时，要先将函数化为一般式，注意分析二次项系数是否为 0

【答案】 B

【解析】 根据二次函数的定义判断，①、③为二次函数。

故选 B .

【标注】【知识点】二次函数的定义

栗子2

2. 2020~2021学年天津河北区初三上学期期中第11题3分 ★★

若函数 $y = (m - 3)x^{m^2-7}$ 是二次函数，则 m 的值为 _____ .

【备注】二次函数要满足自变量最高次为 2，同时也要满足二次项系数不为 0

【答案】 -3

【解析】若 $y = (m - 3)x^{m^2-7}$ 是二次函数，

则 $m^2 - 7 = 2$ ，且 $m - 3 \neq 0$ ，

故 $(m - 3)(m + 3) = 0$ ， $m \neq 3$ ，

解得： $m_1 = 3$ （不合题意舍去）， $m_2 = -3$ ，

$\therefore m = -3$.

故答案为：-3 .

【标注】【知识点】利用二次函数的定义求参数的值

栗子3

3. 2018~2019学年10月天津南开区天津市南开翔宇学校初三上学期月考第14题3分 ★★

已知二次函数 $y = ax^2 + bx - 1$ ($a \neq 0$) 的图象经过点 (1, 1)，则代数式 $3 - a - b$ 的值为 _____ .

【备注】已知函数图象经过某点，则将点的坐标代入到解析式中一定能够成立

【答案】 1

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx - 1$ 的图象经过点 (1, 1)，

$\therefore a + b - 1 = 1$ ，

$\therefore a + b = 2$ ，

$\therefore 3 - a - b = 3 - 2 = 1$.

【标注】【知识点】点在二次函数图象上

4. 2017~2018学年10月天津河西区天津四中初三上学期月考第5题3分 ★★

若二次函数 $y = (m + 1)x^2 - mx + m^2 - 2m - 3$ 的图象经过原点，则 m 的值必为 () .

A. -1或3

B. -1

C. 3

D. -3或1

【备注】函数图象经过原点，将原点代入到解析式中即可求出参数的值，同样也要注意二次项系数不为0

【答案】 C

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = (m+1)x^2 - mx + m^2 - 2m - 3$ 的图象经过原点 $(0, 0)$,

$$\therefore m^2 - 2m - 3 = 0 ,$$

$$\text{解得 } m_1 = -1 , m_2 = 3 ,$$

$\because y = (m+1)x^2 - mx + m^2 - 2m - 3$ 是二次函数 ,

$$\therefore m+1 \neq 0 , \text{ 即 } m \neq -1 ,$$

$$\therefore m = 3 .$$

【标注】【知识点】点在二次函数图象上

二、 二次函数图象与性质

知识回顾：

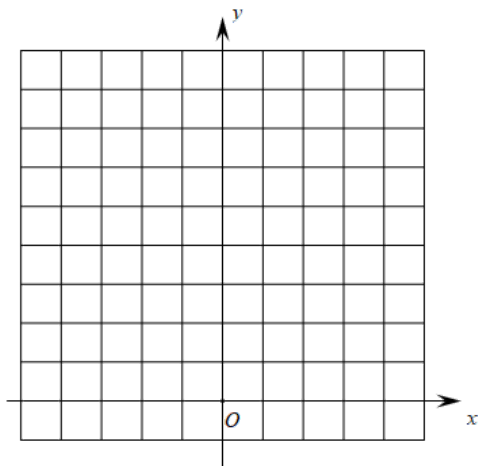
请用描点法画函数 $y = x^2$ 的图象 .

①列表

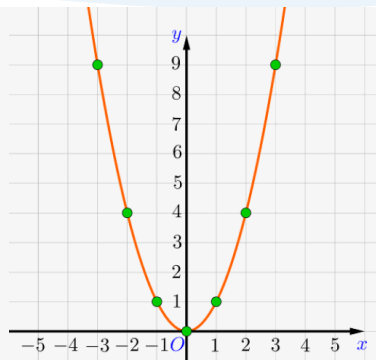
x		-3	-2	-1	0	1	2	3	
y									

②描点

③连线



【备注】画二次函数图象与一次函数的方法相同：列表、描点、连线



! 总结：

从图象可以看出，二次函数 $y = x^2$ 的图象是一条曲线，它的形状类似于投篮或掷铅球时球在空中所经过的路线，只是开口向上。这样的曲线叫做 抛物线。

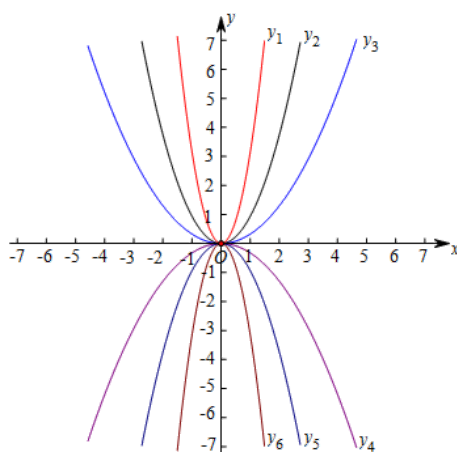
二次函数 $y = x^2$ 的图象叫做 抛物线 $y = x^2$ ：

- ① 抛物线 $y = x^2$ 的开口方向 向上，它是 轴对称 图形，对称轴是 y轴 ($x = 0$)。
- ② 在对称轴左侧， y 随 x 的增大而 减小；在对称轴右侧， y 随 x 的增大而 增大。
- ③ 抛物线与它的对称轴的交点叫做抛物线的 顶点。抛物线 $y = x^2$ 的顶点是 (0, 0)。除顶点外，抛物线上所有点都在顶点的 上方（上方/下方），这个顶点是抛物线的最 低（高低）点。

实际上，二次函数的图象都是抛物线，它们的开口或者向上或者向下，一般地，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象叫做抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 。此外，每条抛物线都有顶点、对称轴。顶点是抛物线的最低点或者最高点。

1. 二次函数 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的图象和性质

观察下列函数 $y_1 = 3x^2$ ， $y_2 = x^2$ ， $y_3 = \frac{1}{3}x^2$ ， $y_4 = -\frac{1}{3}x^2$ ， $y_5 = -x^2$ ， $y_6 = -3x^2$ 的图象，并回答二次函数 $y = ax^2$ 的性质：



二次函数 $y = ax^2$ 的性质

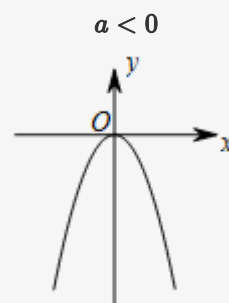
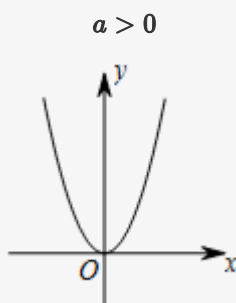
二次项系数 a 的符号	$a > 0$	$a < 0$
图象		
开口方向	向上	向下
对称轴	y 轴 ($x = 0$)	y 轴 ($x = 0$)
顶点	原点 $(0, 0)$	原点 $(0, 0)$
最高点和最低点	有最低点 $(0, 0)$	有最高点 $(0, 0)$
函数最值	有最小值 0	有最大值 0
图象特征	在对称轴左侧, 抛物线从左到右下降 在对称轴右侧, 抛物线从左到右上升	在对称轴左侧, 抛物线从左到右上升 在对称轴右侧, 抛物线从左到右下降
函数变化规律	当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大	当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而增大 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小
$ a $ 决定开口大小	$ a $ 越大, 开口越小; $ a $ 越小, 开口越大. 在对称轴右侧, 沿着逆时针方向, a 的值逐渐增大.	

【备注】1、 a 影响二次函数的开口方向与开口大小：

① 开口方向

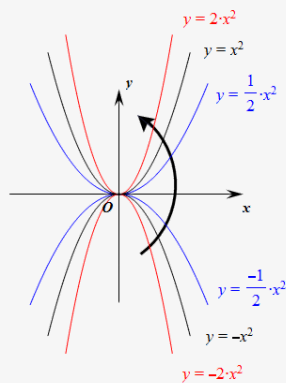
二次项系数 a 的符号

图象



a 的正负决定二次函数的开口方向： $a > 0$ ，开口向上； $a < 0$ ，开口向下

② 开口大小

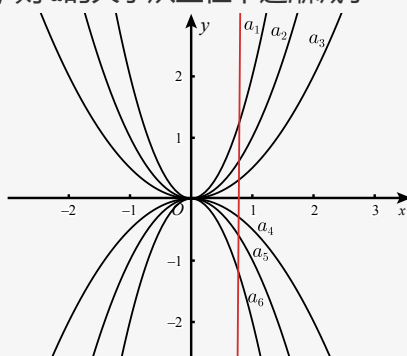


$|a|$ 决定开口大小： $|a|$ 越大，开口越小； $|a|$ 越小，开口越大。

在对称轴右侧，沿着逆时针方向， a 的值逐渐增大。

！注意：

在多个二次函数图象中比较 a 的大小时，还可以在 x 的正半轴，任作一条 $x = m$ 的直线，该直线会与每个二次函数相交，则 a 的大小从上往下逐渐减小。



例如上图，作出直线后可直接得： $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6$ 。

若两个二次函数的开口大小相同，则它们 $|a|$ 的绝对值相同；若两个二次函数开口方向与开口大小都相同，则 a 的值相同。

2、利用二次函数的增减性可以比较函数值的大小：

当 $a > 0$ 时，离对称轴越远，函数值越大；当 $a < 0$ 时，离对称轴越远，函数值越小；因此比较函数值的大小可以直接利用点到对称轴的距离判断，但是一定要注意好开口方向。

🍎 举个“栗”子

栗子4

5. 2020~2021学年10月天津河北区天津市汇森中学初三上学期月考第5题 ★★

若 $y = (2 - m)x^{m^2-3}$ 是关于 x 的二次函数，且图象开口向上，则 m 的值为 ()。

- A. $\pm\sqrt{5}$ B. $\sqrt{5}$ C. $-\sqrt{5}$ D. 0

【备注】 二次函数开口向上，则 $a > 0$ ，此题中 $a = 2 - m > 0$ ，即 $m < 2$

【答案】 C

【解析】 由题知： $\begin{cases} 2 - m > 0 \text{ ①} \\ m^2 - 3 = 2 \text{ ②} \end{cases}$ ，

由②得 $m^2 = 5$ ，

$$\therefore m = \pm\sqrt{5},$$

又由①得： $m < 2$,

$$\therefore m = -\sqrt{5}.$$

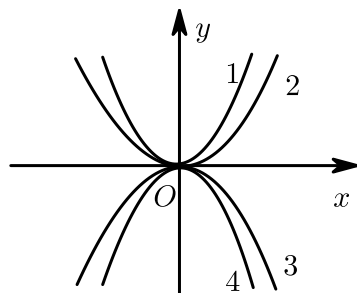
故选 C.

【标注】【知识点】二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

栗子5

6. 2018~2019学年10月天津和平区天津市第二南开中学初三上学期月考第6题3分 ★★

如图所示，四个二次函数的图象分别对应的是① $y = ax^2$. ② $y = bx^2$. ③ $y = cx^2$. ④ $y = dx^2$. 则 a , b , c , d 的大小关系是 () .



A. $a > b > c > d$

B. $a > b > d > c$

C. $b > a > c > d$

D. $b > a > d > c$

【备注】比较二次项系数的大小可以通过逆时针越来越大判断，也可以通过在 x 轴正半轴作垂线判断

【答案】 A

【解析】 本题考查了函数 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 中 a 的性质， $|a|$ 越大，开口越小.

当 $a > 0$ 开口向上，当 $a < 0$ ，开口向下.

【标注】【知识点】二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

栗子6

7. 2020~2021学年9月江苏苏州工业园区苏州星海实验中学初三上学期周测C卷第7题2分 ★★

已知 $a < -1$ ，点 $(a-1, y_1)$ ， (a, y_2) ， $(a+1, y_3)$ 都在函数 $y = -x^2$ 的图象上，则 () .

A. $y_1 < y_2 < y_3$

B. $y_1 < y_3 < y_2$

C. $y_3 < y_2 < y_1$

D. $y_2 < y_1 < y_3$

【备注】 先判断三个点横坐标的大小关系，可得到都是 < 0 ，又因为该二次函数 $a = -1 < 0$ ，利用在 y 轴左侧，随着 x 的增大 y 逐渐增大来比较函数值的大小

【答案】 A

【解析】函数 $y = -x^2$ 图象开口向下，对称轴为 $x = 0$ ，

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时， y 随 x 增大而增大，

当 $x \geq 0$ 时， y 随 x 增大而减小，

$\therefore a < -1$ ，

$\therefore a - 1 < -2$ ， $a + 1 < 0$ ，且 $a - 1 < a < a + 1 < 0$ ，

又点 $(a - 1, y_1)$ ， (a, y_2) ， $(a + 1, y_3)$ 都在抛物线 $y = -x^2$ 上，

$\therefore y_1 < y_2 < y_3$ ，

故选 A。

【标注】【知识点】二次函数 $y = ax^2$ 的图象和性质

栗子7

8. 2018~2019学年初三上学期期中 ★★

已知抛物线 $y = ax^2$ ($a > 0$) 过 $A(-2, y_1)$ 、 $B(1, y_2)$ 两点，则下列关系式一定正确的是 ()。

A. $y_1 > 0 > y_2$

B. $y_2 > 0 > y_1$

C. $y_1 > y_2 > 0$

D. $y_2 > y_1 > 0$

【备注】分析题干可发现， A 、 B 两点位于对称轴的左右两侧，没办法直接通过函数的增减性进行比较，因此需要我们判断 A 、 B 两点离对称轴的距离及开口方向判断：

点 A 离对称轴 2 个单位长度，点 B 离对称轴 1 个单位长度，该二次函数开口向上，离对称轴越远函数值越大，可得 $y_1 > y_2$ 。

【答案】C

【解析】解： $\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = ax^2$ ($a > 0$)，

$\therefore A(-2, y_1)$ 关于 y 轴对称的点的坐标为 $(2, y_1)$ 。

又 $\therefore a > 0$ ， $0 < 1 < 2$ ，

$\therefore 0 < y_2 < y_1$ 。

故选：C。

【标注】【知识点】二次函数 $y = ax^2$ 的图象和性质

独步天下

9. 2020年浙江舟山中考真题第10题3分 ★★

已知二次函数 $y = x^2$ ，当 $a \leq x \leq b$ 时， $m \leq y \leq n$ ，则下列说法正确的是 ()。

A. 当 $n - m = 1$ 时， $b - a$ 有最小值

B. 当 $n - m = 1$ 时， $b - a$ 有最大值

C. 当 $b - a = 1$ 时， $n - m$ 无最小值

D. 当 $b - a = 1$ 时， $n - m$ 有最大值

【备注】

该题难度较大，综合性较强，可根据学生的程度选讲；此题涉及到了分类讨论的思想，需要根据每个选项，先分析好当自变量为何值时，函数取得最值，然后再利用平方差公式以及 a 、 b 、 m 、 n 的范围分析代数式的最值

【答案】 B

【解析】 二次函数 $y = x^2$ 的对称轴为 $x = 0$ ，当 $x \leq 0$ 时， y 随 x 的增大而减小；当 $x \geq 0$ 时， y 随 x 的增大而增大。

① A选项：当 $a \leq x \leq b \leq 0$ 时， $m \leq y \leq n$ ，

$$\therefore m = b^2, n = a^2, a + b \neq 0,$$

若 $n - m = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 1$ 时，

$$b - a = -\frac{1}{a + b},$$

$\therefore a$ 、 b 均为负数或 a 为负数， $b = 0$ ，

$\therefore a + b$ 取不到最小值，即 $-\frac{1}{a + b}$ 取不到最小值，

$a + b$ 可以取最大值为 -1 ($a = -1$ ， $b = 0$ 时)，

即 $b - a = -\frac{1}{a + b}$ 有最大值为 1 ，故 A 错误；

D选项：若 $b - a = 1$ 时，

$$\therefore n - m = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = -(a + b),$$

又 $a < 0$ ， $b \leq 0$ ，

$\therefore a + b$ 无最小值，即 $-(a + b) = n - m$ 无最大值，

$a + b$ 有最大值为 -1 ($a = -1$ ， $b = 0$ 时)，

即 $-(a + b) = n - m$ 有最小值为 1 ，故 D 错误；

② B选项、C选项：当 $0 \leq a \leq x \leq b$ 时， $m \leq y \leq n$ ，

$$\therefore m = a^2, n = b^2, a + b \neq 0, a \geq 0, b \geq 0,$$

若 $n - m = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) = 1$ 时，

$$b - a = \frac{1}{a + b},$$

$\therefore a + b$ 无最大值，

$\therefore b - a = \frac{1}{a + b}$ 没有最小值，

$\therefore a + b$ 可取最小值为 1 ($a = 0$ ， $b = 1$ 时)，

$\therefore b - a = \frac{1}{a + b}$ 有最大值为 1 ，

若 $b - a = 1$ 时， $n - m = a + b$ ，

$\therefore a + b$ 无最大值，

$\therefore n - m = a + b$ 没有最大值，

$\therefore a + b$ 可取最小值为 1 ($a = 0$ ， $b = 1$ 时)，

$\therefore n - m = a + b$ 有最小值为 1 。

③ $a < 0 < b$ 时， $m \leq y \leq n$ ，

$y = x^2$ 取最小值为0, 即 $m = 0$,

若 $n - m = 1$ 时, 即 $m = 0, n = 1$,

$\therefore -1 \leq a < 0, 0 < b \leq 1$,

$\therefore b - a$ 有最大值为2 ($b = 1, a = -1$ 时),

若 $b - a = 1$ 时, $n - m = n$,

又 $-1 \leq a < 0, 0 < b \leq 1$,

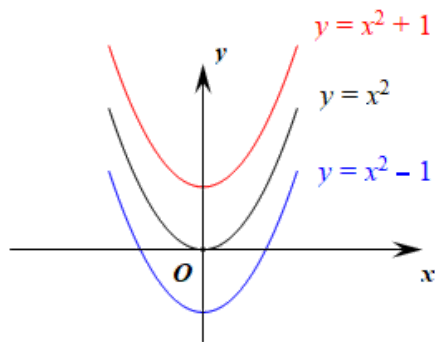
$\therefore n = a^2$ 或 b^2 , 即 n 取不到最小值, 故 C错误, 故 B正确.

故选 B.

【标注】【知识点】定轴动区间函数的最值问题

2. 二次函数 $y = ax^2 + k (a \neq 0)$ 的图象和性质

观察比较 $y = x^2$ 、 $y = x^2 + 1$ 与 $y = x^2 - 1$ 的图象, 并回答:



三条抛物线的形状_____, 位置不同; 对称轴都是_____.

抛物线 $y = x^2 + 1$ 顶点为_____ ; 抛物线 $y = x^2 - 1$ 顶点为_____.

从图形运动的角度:

图形上的每一点都进行同一个平移, 就是这个图形的一个平移; 反过来, 图形的一个平移就是图形上的每一点都进行这个平移, 所以由抛物线顶点所作的平移可知这条抛物线所作的平移:

抛物线 $y = x^2 + 1$ 可以由抛物线 $y = x^2$ 向_____ 平移_____ 个单位得到;

抛物线 $y = x^2 - 1$ 可以由抛物线 $y = x^2$ 向_____ 平移_____ 个单位得到.

【备注】三条抛物线的形状相同, 位置不同; 对称轴都是 y 轴.

抛物线 $y = x^2 + 1$ 顶点为 $(0, 1)$; 抛物线 $y = x^2 - 1$ 顶点为 $(0, -1)$.

抛物线 $y = x^2 + 1$ 可以由抛物线 $y = x^2$ 向上平移1个单位得到;

抛物线 $y = x^2 - 1$ 可以由抛物线 $y = x^2$ 向下平移1个单位得到.

即上下平移满足“上加下减”, 与一次函数平移口诀相同; 抛物线的上下平移不会改变形状及对称轴.

! 总结:

抛物线 $y = ax^2 + k$ ($a \neq 0$) 的对称轴为 _____, 顶点为 _____. 它可以通过抛物线 $y = ax^2$ 向 _____ ($k > 0$ 时) 或向 _____ ($k < 0$ 时) 平移 _____ 个单位得到.

【备注】 抛物线 $y = ax^2 + k$ ($a \neq 0$) 的对称轴为 y 轴, 顶点为 $(0, k)$. 它可以通过抛物线 $y = ax^2$ 向上 ($k > 0$ 时) 或向下 ($k < 0$ 时) 平移 $|k|$ 个单位得到. (即“上加下减, 上下平移在末梢”).

函数 $y = ax^2 + k$ ($a \neq 0$) 的增减性与 $y = ax^2$ 相同:

① $a > 0$, 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小; 函数有最小值 k

② $a < 0$, 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小; 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而增大; 函数有最大值 k

🍌 举个“栗子”

栗子8

10. 2018~2019学年河北廊坊安次区廊坊四中初三上学期期末第4题3分 ★

抛物线 $y = 2x^2 - 3$ 的顶点在 ().

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. x 轴上 D. y 轴上

【备注】 直接利用 $y = ax^2 + k$ ($a \neq 0$) 的顶点坐标为 $(0, k)$ 求解即可

【答案】 D

【解析】 $a = 2$, $b = 0$, $c = -3$,
∴ 抛物线的顶点坐标为 $(0, -3)$.
故选 D.

【标注】 【题型】 图象与系数的关系

11. 2018~2019学年10月天津河西区天津市海河中学初三上学期月考第1题3分 ★★

与抛物线 $y = -x^2 + 1$ 的顶点相同、形状相同且开口方向相反的抛物线所对应的函数表达式为 ().

- A. $y = -x^2$ B. $y = x^2 - 1$ C. $y = -x^2 - 1$ D. $y = x^2 + 1$

【备注】 形状相同、开口相反意味着 a 的正负不同, 所以要寻找 $a = 1$, 顶点坐标为 $(0, 1)$

【答案】 D

【解析】 与抛物线 $y = -x^2 + 1$ 顶点相同, 形状也相同, 而开口方向相反的抛物线, 即与抛物线 $y = -x^2 + 1$ 只有二次项系数不同.

即 $y = x^2 + 1$.

故选 D .

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象和性质

12. 2014~2015学年9月广东广州白云区广东外语外贸大学附设外语学校初三上学期月考第12题3分 ★

抛物线 $y = -2x^2 + 4$ 的最大值是 _____ .

【备注】 $a = -2 < 0$ 开口向下，函数有最大值为 4

【答案】 4

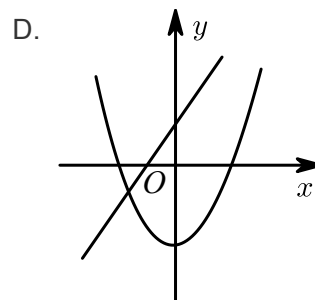
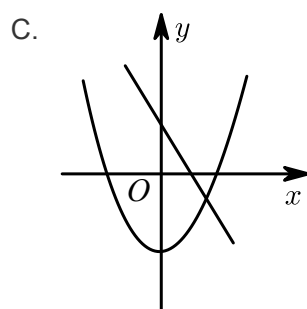
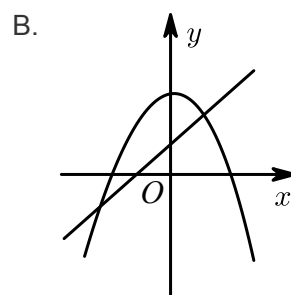
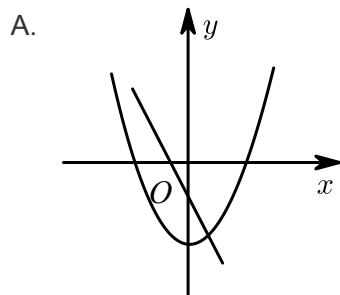
【解析】 由顶点式可知顶点坐标为 $(0, 4)$ ，且 $a = -2 < 0$ 开口向下，所以抛物线 y 的最大值为 4 .

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象和性质

栗子9

13. 2018~2019学年天津河东区天津市第七中学初三上学期期中（第三学片）第10题3分 ★★

同一坐标系中，一次函数 $y = -mx + n^2$ 与二次函数 $y = x^2 + m$ 的图象可能是 () .



【备注】 由一次函数解析式可得应与 y 轴交于原点或正半轴，因此排除 A 选项；其次根据二次函数解析式 $a = 1$ 可得开口应向上，因此排除 B 选项；C、D 选项可以用假设法进行分析，即假设某个函数图象正确去分析另外一个是否正确；对于 C 选项，通过一次函数图象可得 $m > 0$ ，因此二次函数的顶点应该在 y 轴正半轴，排除 C 选项；D 选项，通过一次函数图象可得 $m < 0$ ，因此二次函数的顶点应该在 y 轴负半轴，所以选 D

【答案】 D

【解析】A 选项：由直线与 y 轴的交点在 y 轴的负半轴上可知， $n^2 < 0$ ，错误；

B 选项：由抛物线与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴上可知， $m > 0$ ，由直线可知， $-m > 0$ ，错误；

C 选项：由抛物线 y 轴的交点在 y 轴的负半轴上可知， $m < 0$ ，由直线可知， $-m < 0$ ，错误；

D 选项：由抛物线 y 轴的交点在 y 轴的负半轴上可知， $m < 0$ ，由直线可知， $-m > 0$ ，正确。

故选 D。

【标注】【知识点】一次函数与二次函数图象的综合判断

栗子10

14. 2018~2019学年天津河西区初三上学期期中第16题3分 ★★

将抛物线 $y = x^2$ 向下平移 2 个单位长度，平移后抛物线的解析式为 _____。

【备注】上加下减，上下平移在末梢

【答案】 $y = x^2 - 2$

【解析】将抛物线 $y = x^2$ 向下平移 2 个单位长度，平移后的解析式为 $y = x^2 - 2$ 。

【标注】【知识点】二次函数平移变换

【能力】运算能力

栗子11

15. 2019~2020学年9月天津北辰区天津市北仓第二中学初三上学期月考第10题3分 ★★

若有二次函数 $y = ax^2 + c$ ，当 x 取 x_1 ， x_2 ($x_1 \neq x_2$) 时，函数值相等，则当 $x = x_1 + x_2$ 时，函数值为 ()。

A. $a + c$

B. $a - c$

C. $-c$

D. c

【备注】当二次函数上两个点的函数值相等，则这两个点关于对称轴对称；而 $y = ax^2 + k$ 形式的二次函数的对称轴为 y 轴，因此本题的 $x_1 + x_2 = 0$ ，当 $x = 0$ 时，函数值为 0

【答案】D

【解析】二次函数 $y = ax^2 + c$ 的对称轴是 y 轴，当 x 取 x_1 ， x_2 ($x_1 \neq x_2$) 时，函数值相等，即以 x_1 ， x_2 为横坐标的点关于 y 轴对称，则 $x_1 + x_2 = 0$ ，此时函数值为 $y = ax^2 + c = 0 + c = c$ 。

故选 D .

【标注】【知识点】二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

16. 2020~2021学年天津南开区初三上学期期中第11题3分 ★★

已知点 $A(-2, y_1)$, $B(1, y_2)$, $C(5, y_3)$ 在二次函数 $y = -3x^2 + k$ 的图象上 , 则 y_1 , y_2 , y_3 的大小关系是 () .

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_3 < y_2 < y_1$ C. $y_3 < y_1 < y_2$ D. $y_1 < y_3 < y_2$

【备注】二次函数增减性问题 , 开口向下 , 离对称轴越远函数值越小 ; 判断离对称轴的远近即可

【答案】 C

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = -3x^2 + k$ 图象的对称轴为 $x = 0$ 即 y 轴 ,

点 $A(-2, y_1)$, $B(1, y_2)$, $C(5, y_3)$,

到 y 轴的距离为 $|-2-0|=2$, $1-0=1$, $5-0=5$, $5 > 2 > 1$,

且 $y = -3x^2 + k$ 有最大值 ,

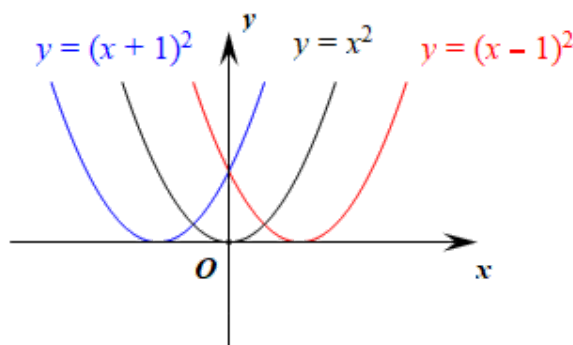
故 $y_2 > y_1 > y_3$ 即 $y_3 < y_1 < y_2$.

故选 C .

【标注】【知识点】二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的增减性

3. 二次函数 $y = a(x - h)^2 (a \neq 0)$ 的图象和性质

观察比较 $y = (x + 1)^2$ 、 $y = x^2$ 、 $y = (x - 1)^2$ 的图象 , 并回答 :



三条抛物线的形状 相同 , 位置不同 .

抛物线 $y = (x + 1)^2$ 的对称轴为 $x = -1$, 顶点为 $(-1, 0)$;

抛物线 $y = (x - 1)^2$ 的对称轴为 $x = 1$, 顶点为 $(1, 0)$;

从图形运动的角度 :

抛物线 $y = (x + 1)^2$ 可以由抛物线 $y = x^2$ 向 左 平移 1 个单位得到 ;

抛物线 $y = (x - 1)^2$ 可以由抛物线 $y = x^2$ 向 右 平移 1 个单位得到。

! 总结：

抛物线 $y = a(x - h)^2$ ($a \neq 0$) 的对称轴为 $x = h$ ，顶点为 $(h, 0)$ 。它可以通过抛物线 $y = ax^2$ 向 左 ($h > 0$ 时) 或向 右 ($h < 0$ 时) 平移 $|h|$ 个单位得到。

【备注】抛物线 $y = a(x - h)^2$ ($a \neq 0$) 可看作由 $y = ax^2$ 左右平移得到，即“左加右减，左右平移在括”；此时要注意进行加减是指 x 发生变化，别忘记整体平方。二次函数的左右平移会使对称轴发生变化，同时函数的增减性也不能从 0 处进行区分了：

① $a > 0$ ，当 $x > h$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $x < h$ 时， y 随 x 的增大而减小；当 $x = h$ 时，函数有最小值 0

② $a < 0$ ，当 $x > h$ 时， y 随 x 的增大而减小；当 $x < h$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $x = h$ 时，函数有最大值 0

🍌 举个“栗子”

栗子 12

17. 2017~2018 学年 10 月天津河东区天津市第八中学初三上学期月考第 10 题 3 分 ★

顶点为 $(-5, 0)$ ，且开口方向、形状与函数 $y = -\frac{1}{3}x^2$ 的图象相同的抛物线是 ()。

A. $y = \frac{1}{3}(x - 5)^2$ B. $y = -\frac{1}{3}x^2 - 5$ C. $y = -\frac{1}{3}(x + 5)^2$ D. $y = \frac{1}{3}(x + 5)^2$

【备注】寻找 $a = -\frac{1}{3}$ ，顶点坐标为 $(-5, 0)$ 的函数解析式

【答案】C

【解析】与 $y = -\frac{1}{3}x^2$ 的图象开口方向、形状相同且顶点为 $(-5, 0)$ 的抛物线是 $y = -\frac{1}{3}(x + 5)^2$ 。

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x - h)^2$ 的图象和性质

18. 2018~2019 学年 10 月天津河西区天津市第四十二中学初三上学期月考第 8 题 3 分 ★

抛物线 $y = -3(x + 1)^2$ 不经过的象限是 ()。

A. 第一、二象限 B. 第二、四象限 C. 第三、四象限 D. 第二、三象限

【备注】由 $y = -3x^2$ 向右平移一个单位得到，因此函数图象经过三、四象限，顶点在 x 轴正半轴

【答案】A

【解析】 $\therefore y = -3(x + 1)^2$ ，

$\therefore$ 抛物线开口向下，对称轴为 $x = -1$ ，顶点坐标为 $(-1, 0)$ ，

$\therefore$ 抛物线经过第三、四象限，

∴不经过第一、二象限．

故选：A．

【标注】【知识点】二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象和性质

栗子13

19. 2019~2020学年天津滨海新区初三上学期期中第13题3分 ★★

抛物线 $y = -2x^2$ 向左平移3个单位长度所得图象的解析式是_____．

【备注】左加右减，左右平移在末梢

【答案】 $y = -2(x+3)^2$

【解析】 由题意可知抛物线 $y = -2x^2$ 向左平移3个单位长度所得图象的解析式为： $y = -2(x+3)^2$

故答案为： $y = -2(x+3)^2$ ．

【标注】【知识点】二次函数平移变换

栗子14

20. 2020~2021学年北京西城区北京四中初三上学期期中第5题2分 ★★

已知 $A\left(-\frac{1}{2}, y_1\right)$ ， $B(1, y_2)$ ， $C(4, y_3)$ 三点都在二次函数 $y = -(x-2)^2$ 的图象上，则 y_1 ， y_2 ， y_3 的大小关系为（ ）．

A. $y_1 < y_2 < y_3$

B. $y_1 < y_3 < y_2$

C. $y_3 < y_1 < y_2$

D. $y_3 < y_2 < y_1$

【备注】开口向下，离对称轴越远函数值越小，此题要注意对称轴为 $x = 2$

【答案】 B

【解析】 $y = -(x-2)^2$ ，开口向下，离对称轴越远，函数值越小，

$$\therefore \left| -\frac{1}{2} - 2 \right| = \frac{5}{2},$$

$$|1 - 2| = 1,$$

$$|4 - 2| = 2,$$

$$\therefore \left| -\frac{1}{2} - 2 \right| > |4 - 2| > |1 - 2|,$$

$$\therefore y_1 < y_3 < y_2.$$

故选B．

【标注】【知识点】二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象和性质

21. 2018~2019学年湖北襄阳市南漳县初三周测 ★★★

已知在二次函数 $y = 2(x - h)^2$ 的图象上，当 $x > 3$ 时， y 随 x 的增大而增大，则 h 的取值范围是 _____ .

【备注】抛物线开口向上，在对称轴右侧 y 随 x 的增大而增大，因此 $h \leq 3$

【答案】 $h \leq 3$

【解析】解：二次函数 $y = 2(x - h)^2$ 的图象的对称轴为直线 $x = h$ ，

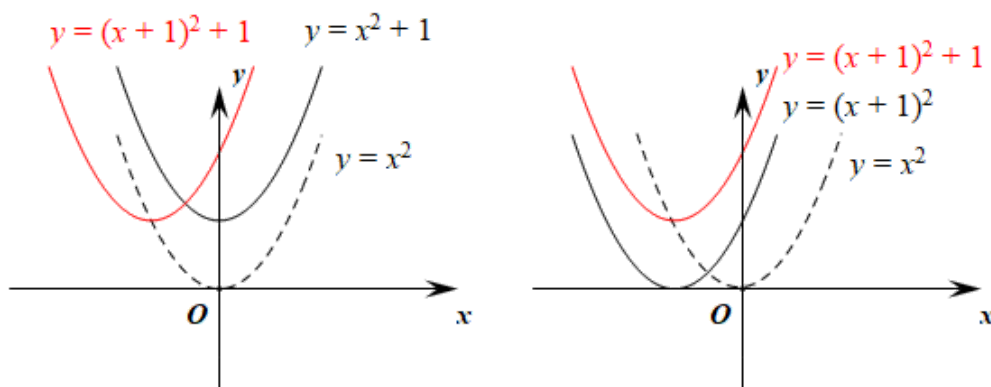
$\because x > 3$ 时， y 随 x 的增大而增大，

$\therefore h \leq 3$.

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x - h)^2$ 的图象和性质

4. 二次函数 $y = a(x - h)^2 + k (a \neq 0)$ 的图象和性质

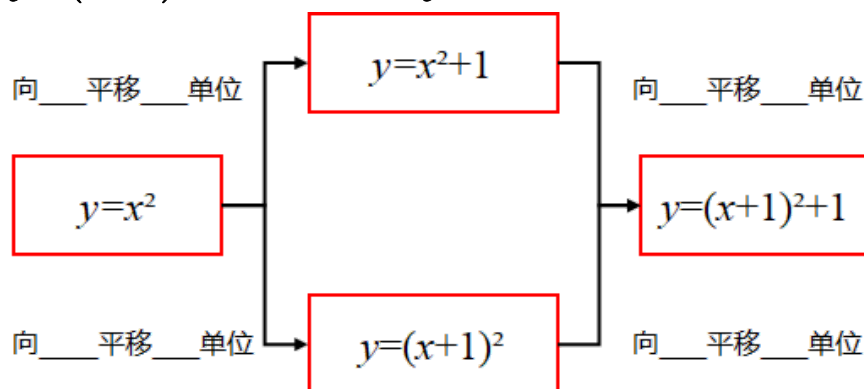
观察比较 $y = (x + 1)^2 + 1$ 、 $y = x^2$ 、 $y = (x + 1)^2$ 、 $y = x^2 + 1$ 的图象，并回答：



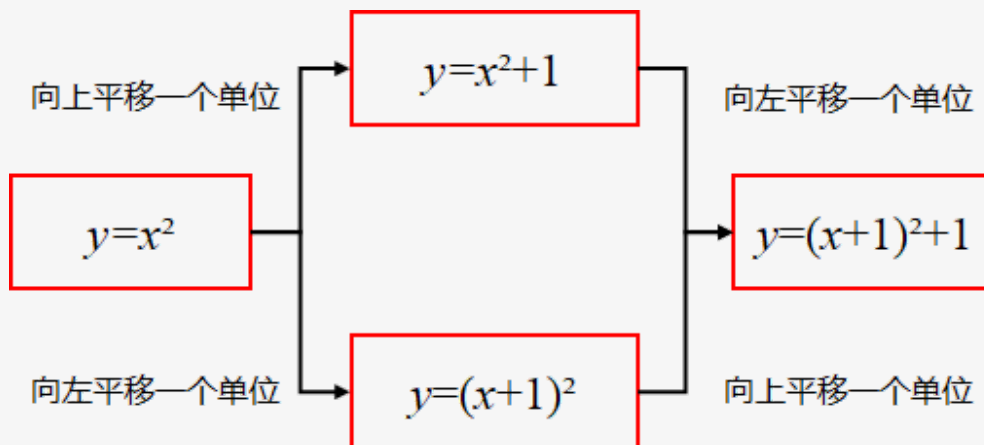
抛物线 $y = (x + 1)^2 + 1$ 的对称轴是 $x = -1$ ，顶点是 $(-1, 1)$.

抛物线 $y = (x + 1)^2 + 1$ 可以由抛物线 $y = x^2 + 1$ 向 左 平移 1 个单位得到；或者由抛物线 $y = (x + 1)^2$ 向 上 平移 1 个单位得到 .

于是抛物线 $y = (x + 1)^2 + 1$ 可以由抛物线 $y = x^2$ 进行两次平移得到：



【备注】



！总结：

抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ ($a \neq 0$) 的对称轴为 $x=h$ ，顶点是 (h, k) 。它可以由抛物线 $y=ax^2$ 进行两次平移得到：可以先向 左 ($h>0$ 时) 或向 右 ($h<0$ 时) 平移 $|h|$ 个单位，再向 上 ($k>0$ 时) 或向 下 ($k<0$ 时) 平移 $|k|$ 个单位；也可以先上下平移再左右平移，所得结果一样。

抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 叫做二次函数的 顶点式。

【备注】抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ ($a \neq 0$) 由 $y=ax^2$ 依据“**左加右减，上加下减，左右平移在括号，上下平移在末梢**”平移得到，叫做二次函数的顶点式，顶点坐标为 (h, k) ，对称轴为 $x=h$ 。函数的增减性会在 $x=h$ 的左右两侧发生变化：

① $a > 0$ ，当 $x > h$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $x < h$ 时， y 随 x 的增大而减小；当 $x = h$ 时，函数有最小值 k

② $a < 0$ ，当 $x > h$ 时， y 随 x 的增大而减小；当 $x < h$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $x = h$ 时，函数有最大值 k

🍌 举个“栗子”

栗子16

22. 2019年山东德州禹城市初三中考一模（平原县、武城县、夏津县联考）第7题4分 ★★

由二次函数 $y=2(x-3)^2+1$ ，可知（ ）。

A. 其图象的开口向下

B. 其图象的对称轴为直线 $x=-3$

C. 其最小值为1

D. 当 $x < 3$ 时， y 随 x 的增大而增大

【备注】该二次函数开口向上，对称轴为 $x=3$ ，顶点坐标 $(3, 1)$ ，最小值为1，当 $x < 3$ 时， y 随 x 的增大而减小，当 $x > 3$ 时， y 随 x 的增大而增大

【答案】C

【解析】A. 二次函数的二次项系数 $2 > 0$ ，开口向上，错误，

B. 图象的对称轴为直线 $x=3$ ，错误，

C. 函数顶点坐标为 (3,1) 最小值为 1, 正确,

D. 由于二次函数对称轴为直线 $x = 3$ 且开口向上, 当 $x < 3$ 时, y 随 x 的增大而减小, 错误.

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象和性质

23. 2020~2021 学年 9 月 天津河北区天津市第二中学初三上学期月考第 16 题 3 分 ★

如果抛物线 $y = (x - m)^2 + m + 1$ 的对称轴是直线 $x = 1$, 那么它的顶点坐标为 _____.

【备注】由解析式可得对称轴为 $x = m$, 顶点坐标为 $(m, m + 1)$, 因此 $m = 1$

【答案】 (1,2)

【解析】 ∵ 抛物线 $y = (x - m)^2 + m + 1$ 的对称轴是直线 $x = 1$,

$$\therefore m = 1,$$

$$\therefore \text{解析式 } y = (x - 1)^2 + 2,$$

$$\therefore \text{顶点坐标为: } (1, 2),$$

故答案为: (1,2).

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象和性质

栗子 17

24. 2017~2018 学年 天津和平区初三上学期期末第 10 题 3 分 ★★

已知点 $A(4, y_1)$, $B(\sqrt{2}, y_2)$, $C(-2, y_3)$ 都在二次函数 $y = (x - 2)^2 - 1$ 的图象上, 则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是 ().

A. $y_1 > y_3 > y_2$

B. $y_1 > y_2 > y_3$

C. $y_3 > y_2 > y_1$

D. $y_3 > y_1 > y_2$

【备注】开口向上, 离对称轴越远函数值越大, 此题要注意对称轴为 $x = 2$

【答案】 D

【解析】 方法一: $x = 4$ 时, $y_1 = 3$.

$$x = \sqrt{2} \text{ 时, } y_2 = 5 - 4\sqrt{2}.$$

$$x = -2 \text{ 时, } y_3 = 15.$$

$$\therefore y_3 > y_1 > y_2.$$

$$\text{方法二: } \because y = (x - 2)^2 - 1,$$

∴ 图象的开口向上, 对称轴是直线 $x = 2$,

$$A(4, y_1) \text{ 关于直线 } x = 2 \text{ 的对称点是 } (0, y_1),$$

$$\therefore -2 < 0 < \sqrt{2},$$

$$\therefore y_3 > y_1 > y_2 ,$$

故选 D .

【标注】【知识点】二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

栗子18

25. 2019~2020学年10月天津河东区天津市育才中学初三上学期月考第15题3分 ★★

若二次函数 $y = -2(x - m)^2 - 1$, 当 $x \geq 2$ 时 , y 随 x 增大而减小 , 则 m 的取值范围是 _____ .

【备注】抛物线开口向下 , 在对称轴右侧满足 y 随 x 的增大而减小 , 因此 $m \leq 2$

【答案】 $m \leq 2$

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = -2(x - m)^2 - 1$, 对称轴为直线 $x = m$, 当 $x \geq 2$ 时 , y 随 x 增大而减小 ,
 $\therefore m \leq 2$.

【标注】【知识点】二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质